*Thomas Peugnet*

*2024*

*Fonctions a plusieurs variables*

Mathématiques

Table des matières

[Fonctions à plusieurs variables 1](#_Toc82440172)

[Introduction 1](#_Toc82440173)

[Lignes de niveau 1](#_Toc82440174)

[Limites de fonctions à plusieurs variables 1](#_Toc82440175)

[Continuité 2](#_Toc82440176)

[Dérivées partielles 3](#_Toc82440177)

[Nouveautés à connaitre 4](#_Toc82440178)

[Approximation linéaire de au point 5](#_Toc82440179)

[Dérivées directionnelles 5](#_Toc82440180)

[Formules de dérivation composée 7](#_Toc82440181)

# Fonctions à plusieurs variables

## Introduction

Une fonction à plusieurs variables se note : , et on note

## Lignes de niveau

Ligne de niveaux :

Exemple :

**Cercle de centre 0 et de rayon .**

Résolution d’équation trigonométriques :

## Limites de fonctions à plusieurs variables

La limite de quand approche de ( est L, s’écrit :

On part de et =M

Propriétés :

Avec

Exemple :

Calculer

Si on tombe sur une forme indéterminée, et/ou si les limites calculées des différentes lignes en un même point (le ne change pas), ne sont pas égales, alors la limite n’existe pas.

Exemple :

On part de la ligne .

Donc sur la ligne .

On part ensuite de la ligne .

Donc sur la ligne .

Étant donné qu’on a deux limites en un même point (ne varie pas), ( peut, lui, pour le coup varier), alors la limite n’existe tout simplement pas.

## Continuité

Est continue en un point de son domaine de définition si toutes les conditions suivntes sont réuinies :

* Existe
* Existe

Exemple :

Montrer que continue en .

Exemple :

Montrer que continue partout.

Polynome continu

Polynome continu

🡪 Est donc continue sur

Propriétés

Continue en

Continue en

Continue en

## Dérivées partielles

Dérivées premières

🡪 On ne dérive que les membres en , et on considère les membres en comme constantes.

🡪 On ne dérive que les membres en , et on considère les membres en comme constantes.

Dérivées secondes

🡪 On ne dérive que les membres en , deux fois, et on considère les membres en comme constantes.

🡪 On ne dérive que les membres en , deux fois, et on considère les membres en comme constantes.

Équations de plan tangent

Equation du plan tangent en

Le vecteur notmal en ce plan est :

## Nouveautés à connaitre

Gradient

2 variables

3 variables

Différentiel (total)

: 2 variables

: 3 variables

Exemple

Pour on a :

Et, en on a :

## Approximation linéaire de au point

Exemple :

Trouver une Application Linéaire de 1) , puis de de 2) , en .

1)

2)

En  :

## Dérivées directionnelles

La dérivée directionnelle de la fonction dans la direction , est donné par :

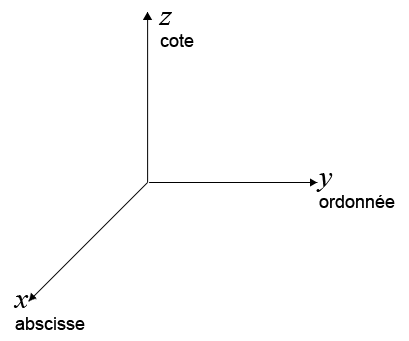
Si on a un plus grand nombre de variables :

Cela représente la pente de la surface , dans la direction .

Exemple 1 :

1) Calculer , 2) Puis calculer au point dans cette même direction.

Exemple 2 :



Gradient

Si n diminue :

La dérivée directionnelle de dans la direction donnée par le vecteur unitaire

Une ligne de niveau est donc perpendiculaire au vecteur .

Où  : vecteur unitaire parrallèle aux lignes de niveau.

La pente est maximale lorsque parrallèle , et le maximum de (Dans une direction donnée).

Dans ce cas, au maximum. De sorte que .

Exemple :

1. Que vaut sa pente la plus raide ? 2) Dans quelle direction ?
2. On calcule .

## Formules de dérivation composée

Pour :

= , avec



Pour

Pour

De même que :

Exemple :

En coordonnées polaires, trouver et en fonction de

[…]

## Extremas Locaux

* Déterminer les points critiques, les points stationnaires.

🡪 Ce sont les points où

🡪 Ce sont les points où et .

* On calcule chaque point sationnaire.

🡪 Ce qui a été vu au S4, sous un autre nom : **RTS**.

* **, et ,** alors c’est un minimum local.
* **, et ,** alors c’est un maximum local.
* **,** alors c’est un point selle.
* **,** on ne peut rien dire.

## Intégrales doubles

Inverser ces intégrales

Première méthode :

Seconde méthode :

Masse totale M

*Application de l’intégrale double*

Avec , la variation infinitésimale de la surface où on cherche à calculer la masse.

Exemple :

*Trouver la masse à l’intérieur d’un demi cercle si la loi de densité est*

Généralement :

* Équation cartésienne :
* Équation polaire :

Le moment

Par rapport à l’axe ,

Par rapport à l’axe ,

Coordonnées du centre de gravité

Avec,

🡪 Coordonnées du centre de gravité.

Le facteur d’étirement pour **l’aire** est le déterminant **jacobien**.

Une intégrale sur dans le plan devient une intégrale sur dans le plan .

Avec et pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

## Intégrales triples

**Cartésrien :**

**Cylindrique :**

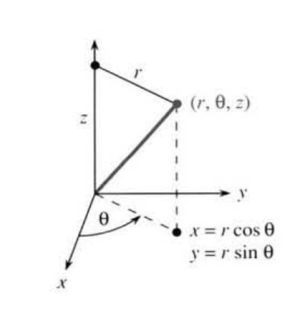
**Sphérique :**

Trouver le volume de à l’intérieur de la sphère unitaire .

🡪 Partir sur .

🡪

[Insérer photo 20/09 :15h48]



Le volume d’une shpère de rayon  :

De plus,

Avec Pour le sphérique : .

Où  : Disque centré en O, et de rayon 3.